Физические основы механики.

1. <u>КИНЕМАТИКА</u>.

1.1. *Кинематика материальной точки. Путь, перемещение, скорость, ускорение.*
Материальной точкой называется тело, размерами к-го можно пренебречь. Непрерывная линия, к-ую описывает точка при своем движении, называется траекторией. Путь – это длина траектории, пройденной точкой. Перемещение точки это длина вектора, проведенного из точки начала движения в точку окончания движения.

1.1.1 *Скорость*.
Мгновенная скорость материальной точки определяется соотношением $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}/\Delta t = d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$ (1), т.е. мгновенная скорость есть производная радиус-вектора по времени, она направлена по касательной к траектории движения точки. При $\Delta t \to 0$ $|\Delta\vec{r}| \to \Delta S$, поэтому определяем $|\vec{v}| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta S/\Delta t = dS/dt = \dot{S}$. Учитывая формулу (1) а так же, что $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, получаем $\vec{v} = \Delta\vec{r}/\Delta t = dx/dt \cdot \vec{i} + dy/dt \cdot \vec{j} + dz/dt \cdot \vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, где $\vec{v}_x = \dot{x}$, $\vec{v}_y = \dot{y}$, $\vec{v}_z = \dot{z}$ – компоненты скорости, они равны производным соответствующих координат по времени.

1.1.2. *Ускорение*.
Для характеристики быстроты изменения скорости вводится векторная физическая величина, называемая ускорением. Она определяется аналогично скорости
$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{v}/\Delta t = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2 = \ddot{\vec{r}}(t)$ (1). С учетом формул $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ и $\vec{v}_x = \dot{x}$, $\vec{v}_y = \dot{y}$, $\vec{v}_z = \dot{z}$ из формулы (1) находим $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где $\vec{a}_x = \ddot{x}$, $\vec{a}_y = \ddot{y}$, $\vec{a}_z = \ddot{z}$ – это компоненты ускорения, они равны производным второго порядка соответствующих координат по времени. С учетом формулы $\vec{v} = v\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор, коллинеарный $\vec{v}$, из формулы (1) получаем $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d(v\vec{\tau})/dt = dv/dt \cdot \vec{\tau} + v \cdot d\vec{\tau}/dt$ (2). Можно показать, что $d\vec{\tau}/dt = v/R \cdot \vec{n}$ (3), где R – радиус кривизны траектории в данной точке, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали и траектории в точке, в к-ый было тело в момент времени t, $\vec{n} \perp \vec{\tau}$. Каждой точке можно сопоставить окружность, к-ая сливается с линией на бесконечно малом ее участке. Радиус этой окружности R характеризует кривизну линии в рассматриваемой точке и называется радиусом кривизны. Подставляя (3) в (2) получим $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{a}_\tau = dv/dt \cdot \vec{\tau}$ – касательное ускорение, оно характеризует быстроту изменения скорости, $a_\tau = dv/dt = d^2S/dt^2$. И $\vec{a}_n = v^2/R \cdot \vec{n}$ – нормальное ускорение, оно характеризует быстроту изменения направления вектора скорости и всегда направлено к центру кривизны траектории.

2. <u>ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ</u>.

2.1. *Первый закон Ньютона (закон инерции).*
Тело, неподверженное внешним воздействиям, либо находящееся в покое, либо движущееся прямолинейно или равномерно, называется свободным. Свойства тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называют инерцией тела. Количественной мерой инерции тела является его масса $[m] = 1кг$. Без указания системы отсчета закон инерции теряет смысл. Существует система отсчета, в к-ой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно – это инерциальная система отсчета. Существует, по крайней мере, одна инерциальная система отсчета.

2.2. *Второй закон Ньютона*.
Силой называется векторная величина, характеризующая воздействие на данное тело со стороны других тел. Сила полностью задана, если указаны ее модуль, направление в пространстве и

точка приложения: $\vec{a} = \vec{F}/m$. Это уравнение можно переписать в другой форме $d(m\vec{v})/dt = \vec{F}$, $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ (1), где $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс материальной точки. Уравнение, записанное в форме (1) утверждает: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Единица измерения силы $\left[\vec{F}\right] = 1H = 1кг \cdot м/с^2$.

2.3. *Третий закон Ньютона.*

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

2.4. *Силы.*

Все силы, встречающиеся в природе, сводятся к силам гравитационного притяжения, электромагнитным силам, слабым и сильным взаимодействиям. Сильные и слабые взаимодействия проявляются в атомных ядрах и в мире элементарных частиц. В механике различают гравитационные, упругие и силы трения. Упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными.

2.4.1. *Силы гравитации, силы тяжести и вес.*

Сила гравитационного взаимодействия двух материальных точек: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, где r – расстояние между точками, m_1, m_2 – их массы, G – гравитационная постоянная ($6,67 \cdot 10^{-11}\ H \cdot м^2/кг^2$). Вблизи поверхности Земли все тела падают с одним ускорением – ускорение свободного падения ($g = 9,81 м/с^2$). Отсюда на всякое тело действует сила тяжести. Вес тела – это сила, с которой тело действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле.

2.4.2. *Упругие силы.*

Они возникают при деформации тела и направлены в сторону противоположную смещению. Для малых деформаций справедливо: $F_x = -kx$, где k – коэффициент пропорциональности, для пружины – это коэффициент жесткости.

2.4.3. *Силы терния.*

Они появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. Сухим трением называется трение, возникающее при относительном перемещении тел: $F_{тр} = mF_n$, т.е. сила трения пропорциональна величине силы нормального давления, m – коэффициент трения, он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, а в случае скольжения еще и от скорости тела. Трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) называется внутренним трением. Для него при небольших скоростях $\vec{F} = -r\vec{v}$, где r – коэффициент сопротивления ($[r] = 1кг/с$).

3. <u>ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА</u>.

3.1. *Закон сохранения импульса.*

Система, в к-ой внешние силы отсутствуют, называется замкнутой. Для замкнутой системы остаются постоянными (сохраняются) три физические величины: импульс, энергия, момент импульса. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим $\vec{F}_{ik}$ силу, с которой материальная точка k действует на i материальную точку. Т.е. $\vec{F}_{ik}$ - это внутренняя сила, обозначим через $\vec{F}_i$ результирующую всех внешних сил, действующих на i материальную точку. Тогда согласно второму закону Ньютона ($d\vec{p}/dt = \vec{F}$) :

$\{d\vec{p}_1/dt = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1;\ d\vec{p}_2/dt = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2;\ ...;\ d\vec{p}_n/dt = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} +$
$+ ... + \vec{F}_{n,n-1} + \vec{F}_n.$

Сложим все эти уравнения:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} P_i = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + ... + (\vec{F}_{1n} + \vec{F}_{n1}) + (\vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_{n,n-1}) + \sum_{i=1}^{n} F_i \quad (1)$$

Согласно третьему закону Ньютона ($\vec{F}_{2k} = -\vec{F}_{k2}$), т.е. каждая из скобок равна 0. Следовательно, сумма внутренних сил, действующих на тела системы всегда равна 0: $\sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{F}_{ik} = 0$. С учетом этого из (1) получим: $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ (2). Введем понятие импульса системы $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$. С учетом этого из (2): $d\vec{p}/dt = \vec{F}_{внеш}$, то $\vec{F}_{внеш} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iвнеш}$, если $\sum_{i=1}^{n} F_{iвнеш} = 0$, то $d\vec{p}/dt$ и, следовательно $\vec{P} = const$, т.е. импульс замкнутой системы сохраняется.

3.2. *Центр масс и закон его движения.*

Положения центра масс определяется радиус-вектором $\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$, где m_i – масса i материальной точки, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, задающий положение этой точки, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ - суммарная масса системы. В однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы. Скорость центра масс: $\vec{v}_c = {d\vec{r}_c}/{dt} = 1/m \times \sum_{i=1}^{n} m\, {d\vec{r}_c}/{dt} = 1/m \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_c = 1/m \times \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P}/m$, где $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ - импульс системы. Согласно системе импульс системы $\vec{p} = m\vec{v}_c$, подставив это выражение в $d\vec{p}/dt = \vec{F}_{внеш}$ получим уравнение движения центра масс $d(m\vec{v}_c)/dt = \vec{F}_{внеш}$. Т.о. центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой равной массе системы под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телам системы. Для замкнутой системы $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iвнеш} = 0$ и, следовательно $\vec{v}_c = const$. Это означает, что центра масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно либо покоится. Система отсчета, относительно которой центр масс покоится, называется системой центра масс. Эта система инерциальная.

3.3. *Реактивное движение. Движение тел с переменной массой.*

Полет ракет основан том, что в результате выбрасывания из сопла газов, ракете сообщается такой же импульс, который уносят с собой газы (идея Кибальчича). Выведем уравнения движения материальной точки с переменной массой на примере движения ракеты. Пусть $m(t)$ масса ракеты в пройденный момент времени t, $\vec{v}(t)$ ее скорость в тот же момент, импульс ракеты в этот момент будет $m\vec{v}$. Спустя время dt масса ракеты и скорость получают приращение dm и $d\vec{v}$, импульс ракеты будет равен $(m + dm)\cdot(\vec{v} + d\vec{v})$, импульс газов $dm_{газ}\vec{v}_{газ}$, где $dm_{газ} = -dm$. С учетом формулы $d\vec{P} = \vec{F}dt$ находим $(m + dm)\cdot(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{газ}\vec{v}_{газ} - m\vec{v} = \vec{F}dt$, $md\vec{v} = (\vec{v}_{газ} - \vec{v})dm + \vec{F}dt$, где $(\vec{v}_{газ} - \vec{v}) = \vec{v}_{отн}$ - скорость истечения газов относительно ракеты или скорость газовой струи. Т.о. $md\vec{v} = \vec{v}_{отн}\cdot dm + \vec{F}dt$ разделим обе части равенства на dt: $m\cdot d\vec{v}/dt = \vec{v}_{отн}\cdot dm/dt + \vec{F}$ (1). Это уравнение совпадает с уравнением, выражающим второй закон Ньютона, однако масса здесь переменная и к внешней силе $\vec{F}$ добавляется реактивная сила: $\vec{F}_{реак} = \vec{v}_{отн}\cdot dm/dt$. Уравнение (1) называют уравнением Мещерского или уравнением движения точки с переменной массой. Из решения уравнения (1) при $\vec{F}=0$ следует, что $\vec{v}=\vec{v}_{отн}\cdot\ln(m_0/m)$ (2), где m_0 - начальная или стартовая масса ракеты, когда $\vec{v}_0=0$. Максимальная скорость $v_{max}=\vec{v}_{отн}\cdot\ln(m_0/(m_0-m_{топл}))$, где $m_{топл}$ - масса топлива и окислителя. Формула (2) называется формулой Циолковского.

4. РАБОТА. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ.

4.1 *Работа.*

Если на тело действует постоянная сила $\vec{F}$, и точка приложения силы переместилась на величину $\Delta\vec{r}$, то эта сила совершила работу $\Delta A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\Delta\vec{r}\right|\cdot\cos a$. Работа – это скаляр. В общем случае переменной силы $A_{12}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\Delta\vec{r}_i$ (1). Это выражение дает приближенное значение работы $A_{12}=\lim_{\Delta r_i\to 0}\sum_{i=1}^{n\to\infty}F_i\Delta r_i$ в математике этот предел называется криволинейным интегралом $A_{12}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}d\vec{r}=\int_1^2\vec{F}d\vec{r}$. Для переменной силы соотношение (1) обычно записывают в дифференциальной форме $dA=\vec{F}d\vec{r}$ (2), где dA – элементарная работа. Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью $P=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta A/\Delta t)=dA/dt$. Если подставим в эту формулу выражение для работы (2), получим: $P=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\vec{F}\Delta\vec{r}/\Delta t\right)=\vec{F}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta\vec{r}/\Delta t\right)=\vec{F}\vec{v}$. Единица работы в системе СИ служит работа, совершаемая при перемещении в 1м силой в 1Н, действующей в направлении перемещения [A]=1Дж. Единицей мощности в системе СИ является [A]=1Вт – это такая мощность, при к-ой за 1с совершается работа равная 1Дж.

4.2. *Консервативные и неконсервативные силы.*

Сила, действующая на материальную точку, называется консервативной (потенциальной), если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения точки. Работа консервативной силы не зависит ни от вида траектории, ни от закона движения материальной точки по траектории. Работа по замкнутому пути $A=\oint_L\vec{F}\Delta\vec{r}=0$ (интегрирование по замкнутому контуру L, говорят, что циркуляция вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру L равна 0). Примеры консервативных сил: силы тяготения и упругости. Неконсервативная сила – сила терния.

4.3. *Потенциальная энергия.*

Если на материальную точку действует консервативная сила, то можно ввести малярную функцию координат точки $\Pi(\vec{r})$, называемую потенциальной энергией. $\Pi(\vec{r}_i)=A_{10}+C$, A_{10} - работа консервативной силы при перемещении материальной точки из положения $\vec{r}_i$ в фиксированное положение $\vec{r}_0$. $\Pi(\vec{r}_1)-\Pi(\vec{r}_2)=(A_{10}+C)-(A_{20}+C)=A_{10}-A_{20}=A_{10}+A_{02}$, т.к. $A_{20}=-A_{02}$. Такая же работа A совершается на любом другом пути, т.е. $A_{12}=\Pi(\vec{r}_1)-\Pi(\vec{r}_2)$. Следовательно, работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии.

4.4. *Потенциальная энергия системы материальных точек.*

Если задано положение каждой материальной точки, то этим определено и положение всей системы или ее конфигурация. Для системы материальных точек так же можно ввести понятие потенциальной энергии системы, обладающей свойством $A_{12}=\Pi(\vec{r}_1)-\Pi(\vec{r}_2)$: $A_{12}=\Pi_1-\Pi_2$, где A_{12} - полная работа консервативных сил, действующих на материальные точки системы при переходе ее из конфигурации 1 в конфигурацию 2, Π_1 и Π_2 - значения потенциальной энергии в этих конфигурациях. Рассмотрим частный случай: изолированную систему из двух взаимодействующих материальных точек, положение которых определяется радиус-векторами $\vec{r}_1$

и $\vec{r}_2$. Полная элементарная работа сил в системе равна $dA = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2$ и по третьему закону Ньютона $F_1 = -F_2$ следует, что $dA = \vec{F}_2(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F}_2 d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_2 d\vec{r}_{12}$, где $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - радиус-вектор точки 2 относительно точки 1. Отсюда следует, что потенциальная энергия такой системы зависит только от расстояния между материальными точками. Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и его потенциальной энергией определяется по следующим формулам: $\vec{F} = -\operatorname{grad} \varPi$ или $\vec{F} = -\left(d\varPi/dx \cdot \vec{i} + d\varPi/dy \cdot \vec{j} + d\varPi/dz \cdot \vec{k} \right)$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы координатных осей.

4.5. *Примеры.*

4.5.1. *Потенциальная энергия растянутой пружины.*

Обозначим через x растяжение пружины, т.е. разность длин пружины в деформированном и недеформированном состояниях. При возвращении пружины из деформированного состояния в недеформированное сила $\vec{F}$ совершает работу $A = \int_x^0 F dx = -k \int_x^0 x dx = \frac{1}{2} kx^2$, т.о. потенциальная энергия пружины равна $\varPi = (kx^2)/2$, где постоянную C положим равной 0.

4.5.2. *Потенциальная энергия гравитационного притяжения.*

При вычислении потенциальной энергии одной из материальных точек массой M ее можно считать неподвижной, а другую массой m - перемещающейся в гравитационном поле создаваемом массой M. При перемещении массы M из ∞ гравитационные силы совершают работу $A = \int_r^\infty dA$; $dA = \vec{F} d\vec{r}$ и $\vec{F} = G \frac{mM}{r^2}$ отсюда $A = \int G \frac{mM}{r^2} dr = G \frac{mM}{r}$, где G - гравитационная постоянная, r - расстояние между массами в конечном состоянии. Эта работа равна убыли потенциальной энергии $A = \varPi_\infty - \varPi(r)$. обычно потенциальную энергию $\varPi_\infty$ принимают равной 0, при таком соглашении $\varPi(r) = -G \frac{mM}{r}$.

4.5.3. *Потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести Земли.*

Изменение потенциальной энергии тела массой m, поднятого с поверхности Земли массой M на высоту h равно $\Delta\varPi = -GMm\left(1/(R+h) - 1/R\right) = GMm \cdot \left(\frac{h}{(R+h)R} \right)$, где $h \ll R$, R - радиус Земли. Отсюда $\Delta\varPi = \frac{GMm}{R^2} h = mgh$, $\frac{GM}{R^2} = g$.

5. <u>КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ</u>.

5.1. *Кинетическая энергия.*

Напишем уравнение движения материальной точки массой m, движущейся под действие сил, результирующая которых равна $\vec{F}$, $m \cdot d\vec{v}/dt = \vec{F}$. Умножим скалярно правую и левую часть этого равенства на элементарное перемещение точки $d\vec{r} = \vec{v} dt$ отсюда $m \cdot d\vec{v}/dt \cdot \vec{v} dt = \vec{F} d\vec{r}$ (1), т.к. $\vec{v}\vec{v} = v^2$, то можно показать, что $\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt = v \cdot dv/dt = 1/2 \cdot d/dt \cdot v^2$. Использую последнее равенство и то обстоятельство, что масса материальной точки постоянная величина, преобразуем равенство (1) к виду: $d/dt \cdot mv^2/2 \cdot dt = \vec{F} d\vec{r}$. Проинтегрируем обе части этого равенства вдоль траектории частицы от точки 1 до точки 2: $\int_1^2 d/dt \cdot mv^2/2 \cdot dt = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$. Согласно определению первообразной и формулы $A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$ для работы переменной силы получим соотношение:

$mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = A_{12}$. Величина $T = mv^2/2 = p^2/2m$ называется кинетической энергией материальной точки. Т.о. приходим к формуле: $A_{12} = T_2 - T_1$, т.е. работа результирующей всех сил, действующих на материальную точку, расходуется на приращение кинетической энергии этой частицы. Кинетическая энергия системы определяется выражением $T = \sum_{i=1}^{n} m_i v^2{}_i/2$, где A_i - это работа всех сил как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

5.2. *Закон сохранения энергии в механике.*

Рассмотрим систему из n материальных точек, на которые действуют как консервативные, так и неконсервативные силы. Найдем работу, которую совершают эти силы при перемещении системы из одной конфигурации (положение всей системы) в другую: $A_{12конс} = П_1 - П_2$. Работу неконсервативных сил обозначим A'_{12}. Согласно формуле $A_{12} = T_2 - T_1$ суммарная работа всех сил затрачивается на приращение кинетической энергии системы T, следовательно, $П_1 - П_2 + A'_{12} = T_2 - T_1$ и $(T_2 + П_2) - (T_1 + П_1) = A'_{12}$. Сумма кинетической и потенциальной энергии представляет собой полную механическую энергию: $E = T + П$. Т.о. работа неконсервативных сил равна приращению полной энергии системы: $E_2 - E_1 = A'_{21}$. Закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия системы материальных точек, находящихся под действием консервативных сил остается постоянной. При наличии неконсервативных сил (силы трения, силы сопротивления) механическая энергия системы уменьшается, что приводит к ее нагреванию. Такой процесс называется диссипацией (рассеяние) энергии. Силы, приводящие к диссипации энергии, называются диссипативными. Кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета.

5.3. *Упругий и неупругий удары.*

Существует два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. Абсолютно упругим называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростью, величина и направление которых определяется двумя условиями – сохранением энергии и сохранением полного импульса системы тел: $m_1 v^2{}_{10}/2 + m_2 v^2{}_{20}/2 = m_1 v^2{}_1/2 + m_2 v^2{}_2/2$, отсюда $m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$, отсюда $m_1(v_{10} - v_1) = m_2(v_2 - v_{20})$ (1) и из всего этого $v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20}$ (2), умножим это выражение на m_2 и вычтя результат из (1), а затем умножив (2) на m_1 и сложив результат с (1), получим скорости шаров после удара: $v_1 = (2m_2 v_{20} + (m_1 - m_2)v_{10})/(m_1 + m_2)$, $v_2 = (2m_1 v_{10} + (m_2 - m_1)v_{20})/(m_1 + m_2)$. Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При этом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса: $m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v + m_2 v = (m_1 + m_2)v$, отсюда $v = (m_1 v_{10} + m_2 v_{20})/(m_1 + m_2)$.

6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА.

6.1. *Момент сил и момент импульса относительно неподвижного начала.*

Пусть O какая-либо неподвижная точка в инерциальной системе отсчета. Ее называют началом или полюсом. Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется вектор произведения радиус-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$: $\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$, $M = rF\sin a$. Моментом M нескольких сил относительно точки называется сумма моментов этих сил относительно этой же точки $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i)$. Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется вектор произведения радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$: $\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p}$. Для системы m материальных точек моментом импульса относительно неподвижной точки O называется сумма моментов импульсов этих точек относительно того же начала: $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i)$.

6.2. *Уравнение моментов.*

Предположим, что точка O неподвижна в случае одной материальной точки, дифференцируя равенство $\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p}$, получаем: $d\vec{L}/dt = d\vec{r}/dt \cdot \vec{p} + \vec{r} \cdot d\vec{p}/dt$. При неподвижной точке O $\vec{v} = d\vec{r}/dt \parallel \vec{p}$, поэтому $d\vec{r}/dt \cdot \vec{p} = 0$, кроме того $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, т.о. $\boxed{d\vec{L}/dt = M}$ - это уравнение моментов для одной материальной точки. Для системы материальных точек, в которой L определяется выражением $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i)$, а M - выражением $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i)$, для внешних сил уравнение моментов имеет вид: $\boxed{d\vec{L}/dt = \vec{M}_{внеш}}$. Моментом импульса системы относительно оси называется проекция на эту ось вектора момента импульса системы относительно любой точки, выбранной на рассматриваемой оси. Выбор точки на оси влияет на значения моментов импульса M и L относительно точки, но не влияет на значения соответствующих проекций моментов на эту ось. Если выбираем прямоугольную систему координат с началом совпадающим с полюсом, то: $dL_x/dt = M_{xвнеш}$, $dL_y/dt = M_{yвнеш}$, $dL_z/dt = M_{zвнеш}$.

6.3. *Закон сохранения момента импульса.*

Если система замкнута, т.е. внешних сил нет ($\vec{M}_{внеш} = 0$) и, следовательно, согласно уравнению $d\vec{L}/dt = \vec{M}_{внеш}$ вектор $\vec{L}$ не изменяется со временем, отсюда вытекает закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным; момент импульса сохраняется и для незамкнутой системы, если $\vec{M}_{внеш} = 0$.

6.4. *Движение в поле центральных сил.*

Если на материальную точку действует сила вида $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r}/r$, то говорят, что материальная точка находится в поле центральных сил, если начало координат совпадает с центром сил. Момент M центра сил F относительно центра сил O равен 0, следовательно, движение в центральном поле момент импульса материальной точки остается постоянным. Материальная точка, движущаяся в поле центральных сил, это консервативная система, поэтому сохраняется полная механическая энергия $E = T + П = const$. Для гравитационного центрального поля большой массы M имеем: $E = mv^2/2 - G \cdot mM/r < 0$. В этом случае траекторией материальной точки является эллипс, один из фокусов которого совпадает с центром силы, т.е. положением центра масс. При $E = 0$ траекторией частицы является парабола, при $E > 0$ гипербола.

7. <u>ТВЕРДОЕ ТЕЛО В МЕХАНИКЕ</u>.

7.1. *Степени свободы. Сообщенные координаты.*

Положение точки в пространстве задается некоторым числом независимых координат, например, тремя координатами декартовой системы, но вместо прямоугольных можно взять цилиндрические или сферические координаты. Существенно, что при любом выборе число независимых координат равно трем, про такую точку говорят, что она обладает тремя степенями свободы. Пусть материальная точка все время вынуждена находиться на какой-либо заданной поверхности, итак независимыми остаются две координаты, третья координата может быть вычислена из уравнения связи $f(x, y, z) = 0$. В таких условиях точка обладает двумя степенями свободы. Если точка может перемещаться только вдоль заданной кривой, то число степеней свободы один.

7.2. *Число степеней свободы твердого тела.*

Абсолютно твердым телом называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между точками при движении системы не изменяются с течением времени. Чтобы однозначно определить положение твердого тела достаточно задать положение каких либо трех точек A, B, C не лежащих на одной прямой. Положение точек можно задать их прямоугольными координатами x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C. Эти девять координат связаны тремя соотношениями приведенными далее: $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = const$, $(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = AC^2 = const$, $(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = const$. Независимых координат остается только шесть – твердое тело имеет шесть степеней свободы.

7.3. *Уравнение движения и равновесия твердого тела.*

Уравнение движения центра масс: $d\vec{p}/dt = \vec{F}_{внеш}$ (1), уравнение момента: $d\vec{L}/dt = \vec{M}_{внеш}$ (2). Если твердое тело покоится, то уравнения (1) и (2) переходят в: $\vec{F}_{внеш} = 0$, $\vec{M}_{внеш} = 0$. Это необходимые условия равновесия твердого тела, но они не являются достаточными.

7.4. *Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.*

Движение твердого тела, при котором все точки прямой AB, жестко связанной с телом, остаются неподвижными, называется вращением тела вокруг неподвижной оси AB. Такое твердое тело имеет одну степень свободы. И его положение в пространстве полностью определяется значением угла поворота вокруг оси вращения из некоторого начального положения этого тела. Мерой перемещения тела за малый промежуток времени dt принят вектор $d\vec{j}$ элементарного поворота тела, по модулю он равен углу поворота тела и за время dt направлен вдоль от вращения так, что если смотреть вдоль него, то поворот виден происходящим по часовой стрелке. Вектор угловой скорости $\vec{w} = d\vec{j}/dt$. Если r радиус-вектор из некоторой точки O на оси вращения OZ до произвольной материальной точки тела, то скорость этой точки определяется следующим соотношением: $\vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{r} = \vec{w} \cdot \vec{r}_{\perp}$, где $\vec{r}_{\perp}$ - составляющая вектора $\vec{r}$ перпендикулярная оси. Уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z имеет вид $d\vec{L}/dt = M_{zвнеш}$, где L_z и $M_{zвнеш}$ - проекция моментов импульса L и $M_{внеш}$ на ось вращения. Определим момент импульса относительно точки O на оси OZ полагая $\vec{r}_i = \overrightarrow{OO_i} + \vec{r}_{i\perp}$, где O_i - центр окружности, по которой движется i материальная точка. $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OO_i} \cdot m_i \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{i\perp} \cdot m_i \vec{v}_i)$. Первое слагаемое перпендикулярно оси Z, а второе параллельно. Т.о.: $L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r^2_{i\perp} w$ или $\boxed{L_z = J_z w}$, где $\boxed{J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r^2_{i\perp}}$ - момент инерции относительно оси Z. Тогда уравнение динамики тела, вращающегося относительно неподвижной оси Z имеет вид: $\boxed{J_z \cdot dw/dt = M_{zвнеш}}$ или $\boxed{J_z e = M_{zвнеш}}$.

7.5. *Теорема Штейнера.*

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями: $J_z = J_c + md^2$, где J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела, J_z - момент инерции тела относительно некоторой оси Z, d - расстояние между осями.

7.6. *Кинетическая энергия при плоском движении.*

Плоским (плоскопараллельным) движением называется такое движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях: $W_k = mv^2/2 + Jw^2/2$, где первое слагаемое кинетическая энергия для поступательного движения, а второе кинетическая энергия для вращательного движения. Аналогичные величины для поступательного и вращательного движения: $\vec{v} \to \vec{w}$, $\vec{a} \to e$, $\vec{F} \to \vec{M}$, $m \to J$, $\vec{p} = m\vec{v} \to \vec{L} = I\vec{w}$, $d(m\vec{v})/dt = \vec{F} \to d(\vec{J}\vec{w})/dt = \vec{M}$ или $m\vec{a} = \vec{F} \to J\vec{e} = \vec{M}$, $W_k = mv^2/2 \to W_k = Jw^2/2$.

8. <u>КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ</u>.

8.1. *Гармонические колебания.*

Рассмотрим простейшую колебательную систему – груз массой m, подвешенный на пружине. Рассмотрим вертикальное движение этого груза под действием однократно приложенной силы отклонение обозначим через x и предположим, что имеем дело с абсолютно упругой пружиной. Пружина действует на груз с упругой силой F: $F=-kx$, где k - жесткость пружины. Механическая система, совершающая колебания около положения равновесия, называется классическим осциллятором. Промежуток времени, по истечении которого движение повторяется, называется периодом колебания и обозначается $[T]=c$. Частота колебаний равна числу полных колебаний за 1c $n=1/T$ $[n]=Гц$. Выведем уравнение колебаний гармонического осциллятора. Напишем второй закон Ньютона: $F=ma$, где $F=-kx$, $a=dv/dt=d^2x/dt^2=\ddot{x}$, в итоге: $m\cdot d^2x/dt^2=-kx$ или $\boxed{\ddot{x}+w_0x=0}$ (1), где $\boxed{w_0=\sqrt{k/m}}$ (2). Рассмотренное уравнение (1) является обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянным коэффициентом, его решение имеет вид: $x=A\cos(w_0t+q)$ или $x=A\sin(w_0t+q)$, где A - амплитуда колебаний, т.е. наибольшее отклонение колеблющегося груза от положения равновесия. Т.к. значения как $\cos$, так и $\sin$ через $2p$ радиан повторяются, то можно найти связь между T_0 и w_0: $w_0(t+T)+q=w_0t+q+2p$, отсюда $w_0=2p/T_0=2pn_0$ (3), где w_0 - собственная круговая частота. Для вращательного движения круговая частота и величина угловой скорости совпадают ($w=dj/dt$). Выражение (w_0t+q) называют фазой колебания, оно определяет смещение в данный момент времени t, q - начальная фаза, она характеризует смещение в начальный момент времени ($t=0$) и определяется начальными условиями, точно так же как и амплитуда A. Пусть $q=0$, тогда $x=A\cos(w_0t)=A\cos(2p/T_0\cdot t)=A\cos(2pn_0t)$. Из формул (2) и (3) следует, что через период колебания $T_0=2p/w_0=2p\sqrt{m/k}$ и не зависит от амплитуды колебаний A: $v=dx/dt=\dot{x}=-Aw_0\sin(w_0t+q)$. Скорость пропорциональна амплитуде и круговой частоте, $a=\ddot{x}=-Aw_0\cos(w_0t+q)=-w^2{}_0x$. Ускорение пропорционально A и $w^2{}_0$, и по направлению совпадает с направлением силы $\vec{F}$. Простейшее периодическое колебание, при котором смещение изменяется со временем по закону $\cos$ или $\sin$, называется гармоническим колебанием.

8.2. *Потенциальная и кинетическая энергия колеблющейся системы.*

Известно, что потенциальная энергия упругодеформированного тела равна $П=kx^2/2$, где k - коэффициент упругости, x - смещение, отсюда для потенциальной энергии колебания находим $П=kA^2/2\cdot\cos^2(w_0t+q)$. Кинетическая энергия $T=mv^2/2$ (1), отсюда находим следующее выражение $T=(mw^2{}_0A^2)/2\cdot\sin^2(w_0t+q)=kA^2/2\cdot\sin^2(w_0t+q)$ (2). Анализ формул (1) и (2) показывает, что когда одна из энергий T или $П$ увеличивается, то другая уменьшается. Полная энергия $E=T+П=kA^2/2$ остается постоянной, и для пружинного маятника она работой, совершенной внешней силой по сжатию или растяжению пружины.

8.3. *Векторная диаграмма гармонического колебания.*

Гармоническое колебание $x=A\cos(w_0t+q)$ можно представить в виде вектора $\vec{A}$, вращающегося против хода часовой стрелки с угловой скоростью равной круговой частоте w_0. Проекция вектора $\vec{A}$ на OX будет равна $x=A\cos(w_0t+q)$.

8.4. *Комплексная форма представления колебаний.*

Формула Эйлера для комплексных чисел $e^{ia}=\cos a+i\sin a$, где $i=\sqrt{-1}$, поэтому уравнение гармонического колебания $x=A\cos(w_0t+q)$ можно записать в экспоненциальной форме:

$\tilde{x} = Ae^{i(w_0 t + q)} = A\exp[i(w_0 t + q)]$. Вещественная часть представляет собой ($\mathrm{Re}(\tilde{x})$) смещение x при гармоническом колебании $x = \mathrm{Re}(\tilde{x}) = A\cos(wt + q)$ обычно пишут $x = Ae^{i(wt+q)} = A\exp[i(wt + q)]$.

8.5. *Сложение одинаково направленных колебаний.*

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты, смещения которых имею вид $x_1 = A_1\cos(wt + q_1)$ и $x_2 = A_2\cos(wt + q_2)$. Тогда $x = x_1 + x_2 = A\cos(wt + q)$, где q - начальная фаза результирующего колебания. И можем найти $A^2 = A^2{}_1 + 2A_1A_2\cos(q_2 - q_1) + A^2{}_2$, $q = arctg[(A_1\sin q_1 + A_2\sin q_2)/(A_1\cos q1 + A_2\cos q_2)]$. Пусть $q_1 = q_2 = q$ тогда можем определить, что $x = x_1 + x_2 = 2A\cos[(w_1 - w_2)/2\cdot t]\cos[(w_1 + w_2)/2\cdot t]$.

8.6. *Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.*

Пусть $x = A\cos(wt)$, $y = B\cos(wt)$, тогда траекторией будет прямая линия $y = B/A\cdot x$. Пусть $x = A\cos(wt)$, $y = B\sin(wt)$, тогда траекторией будет эллипс $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершают одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, такие фигуры называются фигурами Лиссажу.

8.7. *Гармонические осцилляторы.*

8.7.1. *Математический маятник.*

Это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. Тангенциальное ускорение a_t возникает под действием потенциальной силы $F_t = -mg\sin j$.Для малых j можно положить $\sin j = j$, тогда $\vec{F}_t = -mgj$. С другой стороны тангенциальное ускорение связано с угловым $e = dj^2/dt^2$ соотношением $a_t = el = l\,d^2j/dt^2 = l\ddot{j}$, где l - длина нити. Из второго закона Ньютона следует, что $ma_t = F_t$ или $ml\ddot{j} = -mgj$. Разделим левую и правую часть уравнения на массу: $\boxed{\ddot{j} + w^2{}_0 j = 0}$ (каноническое уравнение гармонических колебаний), где $w_0 = \sqrt{g/l}$. Решением этого уравнения для малых углов j будет следующее выражение: $j = j_m\cos(w_0 t + q) = j_m\cos(2p/T\cdot t + q)$, $T_0 = 2p/w_0 = 2p\sqrt{l/g}$.

8.7.2. *Пружинный маятник.*

Это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий колебания около положения равновесия. Для него $w_0 = \sqrt{k/m}$, $T_0 = 2p\sqrt{m/k}$.

8.7.3. *Физический маятник.*

Это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела. На маятник, отклоняющейся на малый угол j, действуют момент сил $M = -mgl\sin j = -mglj$, который сообщает угловое ускорение $\vec{e} = d^2\vec{j}/dt^2 = \vec{M}/\vec{J}$, где $\vec{J}$ - момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O. С учетом этого получаем дифференциальное уравнение: $J\cdot d^2j/dt^2 = -mglj$. Разделим правую и левую часть на массу m: $\boxed{\ddot{j} + w^2{}_0 j = 0}$ (каноническое уравнение гармонических колебаний), где $w_0 = \sqrt{(mgl)/J}$. И $\boxed{j = j_m\cos(w_0 t + q)}$, где $T_0 = 2p/w_0 = 2p\sqrt{J/(mgl)} = 2p\sqrt{L/g}$, где $L = J/ml$ - приведенная длина физического маятника, это длина такого маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебания данного физического маятника. Т.о. точка O', расположенная на расстоянии L от O, называется его центром качаний. Период колебаний относительно точек O и O' совпадают.

8.8. *Свободные затухающие колебания.*

Кроме силы упругости $F = -kx$ на тело действует так же сила сопротивления, которая при медленных движениях пропорциональна скорости: $F_{сопр} = -rv = -r\cdot dr/dt$, где r - коэффициент сопротивления $[r] = кг/с$. Тогда уравнение движения тела (второй закон Ньютона) будет иметь вид $m \cdot d^2r/dt^2 = -kx - r \cdot dx/dt$. Разделим левую и правую часть на массу: $\boxed{\ddot{x} + 2b\,\dot{x} + w^2{}_0 x = 0}$ (уравнение затухающих колебаний), где $b = r/2p$ - коэффициент затухания $[b] = c^{-1}$. Решение этого уравнения имеет вид: $x = A_0 \exp[(-b - \sqrt{b^2 - w^2{}_0})t]$. Проанализируем это уравнение: 1) $b \gg w_0$ тогда $x = A_0 \exp(-2bt)$, т.е. движение непериодическое (апериодическое); 2) $b \le w_0$ тогда $x = A_0 \exp(-bt)\cos(wt + q) = A(t)\cos(wt + q)$, где $A(t) = A_0 \exp(-bt)$, $w = \sqrt{w^2{}_0 - b^2}$, $T = 2p/w = 2p\Big/\sqrt{w^2{}_0 - b^2}$.

8.8.1. *Логарифмический декремент затухания.*

Натуральный логарифм ($\ln$) отношения отклонения системы в момент времени t и $(t+T)$ в физике принято называть логарифмическим декрементом затухания, это следующая величина: $d = \ln(x(t)/x(t+T)) = \ln[(A_0 e^{-bt})/(A_0 e^{-b(t+T)})] = bT = 2pb\Big/\sqrt{w^2{}_0 - b^2} = 2pb/w$. Величина, обратная d, показывает, число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2,7182$ раз. Величина $q = p/d = pw/2pb = w/2b$ называется добротностью колебательной системы. Рассмотренная колебательная система называется диссипативной, т.к. механическая энергия постепенно уменьшается (переходит в другие виды энергии).

8.9. *Вынужденные колебания.*

В случае, когда вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону, колебания описываются дифференциальным уравнением: $\ddot{x} + 2b\,\dot{x} + w^2{}_0 x = f_0 \cos(wt)$ (1), где b - коэффициент затухания, w_0 - собственная частота, $f_0 = F_0/m$ (F_0 - амплитуда вынуждающей силы), w - частота силы. Уравнение (1) неоднородное, его общим решением является следующее выражение: $x = \left((F_0/m)\Big/\sqrt{(w^2{}_0 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\right) \times \cos(wt - arctg(2bw/(w^2{}_0 - w^2)))$. Эта функция описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда $A = (F_0/m)\Big/\sqrt{(w^2{}_0 - w^2)^2 + 4b^2w^2}$ вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Для данной колебательной системы амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, при чем величина отставания j так же зависит от частоты вынуждающей силы. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется резонансом, а частота – резонансной частотой, она равна: $w_{рез} = \sqrt{w_0^2 - 2b^2}$, амплитуда при резонансе $A_{рез} = (F_0/m)\Big/\left(2b\sqrt{w_0^2 - b^2}\right)$.